

林廷數學考試中心
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題
數學考科

109.06.11

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 4 題，選填題第 A 至 B 題共 2 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設二階方陣 $L = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \\ -\cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若存在最小的正整數 n ，

使得 $L^n = I$ ，則 $n = ?$

- (1) 3
- (2) 6
- (3) 9
- (4) 12
- (5) 15

2. 一四面體 $ABCD$ 置於空間坐標系中，其中 $A(0,0,0)$ ， D 點在 z 軸上。若 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 3$ ， $\overline{BD} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{AD} = 5$ ，將此四面體繞 z 軸旋轉一圈，繞行的區域所得體積為 $k\pi$ ，則 $k = ?$ (已知：圓錐體體積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}$)

- (1) $\frac{144}{25}$
- (2) $\frac{25}{12}$
- (3) $\frac{48}{5}$
- (4) $\frac{12}{7}$
- (5) $\frac{49}{25}$

3. 方程式 $3\sin x = \log_5 x$ 有多少個相異實根？

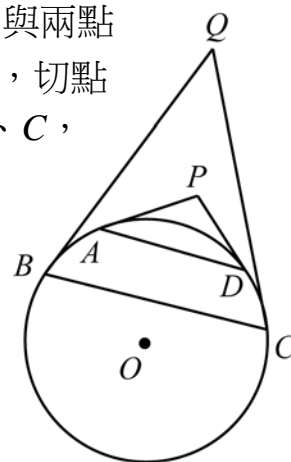
- (1) 1
- (2) 3
- (3) 37
- (4) 39
- (5) 125

4. 市面上有一款電腦遊戲稱作「五行之塔」。遊戲中有金、木、水、火、土，五種不同屬性的卡片，每次抽取一張，其中土剋水、水剋火，火剋木、木剋金、金剋土。遊戲一開始抽中各屬性卡片的機率皆為 0.2，其後如果某次抽到某屬性的卡片，則下次抽到相同屬性的卡片機會降為 0.1，而抽到相剋的屬性則機會提升至 0.3，抽到其它屬性的機率仍為 0.2。試問，遊戲一開始若連續抽 3 張卡片，則 3 張卡片屬性皆不同的機率為何？

- (1) 0.51
- (2) 0.52
- (3) 0.61
- (4) 0.63
- (5) 0.68

5. 如右圖所示，平面上有一圓 $O: x^2 + y^2 - 20x - 16y + 128 = 0$ 與兩點 $P(14, 8 + 4\sqrt{2})$ 、 $Q(16, 8 + 6\sqrt{3})$ 。過 P 點作圓 O 的兩切線，切點分別為 A 、 D 。過 Q 點作圓 O 的兩切線，切點分別為 B 、 C ，則劣弧 AB 、線段 BC 、劣弧 CD 、線段 AD 所圍出來的區域面積為何？

- (1) 4π
- (2) 6π
- (3) 8π
- (4) 10π
- (5) 12π



二、多選題（占 32 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 空間中，下列哪些圖形可能是 z 軸在某個平面上的投影？

(1) $(0, 0, -2)$

(2) $(0, 1, 0)$

(3) $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{z-5}{13}$

(4) $\frac{x}{8} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{13}$

(5) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=4+t \end{cases}, t \in R$

7. 下列敘述哪些正確？

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(3) 若 $f(x) < g(x)$ 對任意 $x < a$ 皆成立，且 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$ 皆存在，則 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - bx + 8}{x^2 - (a+2)x + 2a} = \frac{1}{5}$ ，則 $(a, b) = (12, 6)$

(5) 若 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，則 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \left[\frac{1}{x} \right] = 0$

8. 一不公正硬幣出現正面的機率為 $\frac{1}{3}$ 。假設每次投擲的過程中皆為獨立事件。且

擲 n 次此硬幣出現 k 次正面的機率記為 $f(n, k)$ ，若已知

$$9f(n, k) = a \times f(n-2, k-3) + b \times f(n-2, k-2) + c \times f(n-2, k-1) + d \times f(n-2, k),$$

其中 a, b, c, d 皆為實數，則下列哪些選項是正確的？

(1) $f(4, 3) = \frac{8}{81}$

(2) $a = 0$

(3) $b = 2$

(4) $c = 3$

(5) $d = 4$

9. 下列哪些 a 值可使方程式 $x^2 - 2x + \log(2a^2 - a) = 0$ 有兩個正實根？

(1) $a = 1$

(2) $a = -\sqrt{2}$

(3) $a = \frac{1}{\pi}$

(4) $a = \log_5 15$

(5) $a = \tan \frac{5\pi}{18}$



三、選填題（占 14 分）

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡上「選擇（填）題答案區」。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 三角形 ABC 中， $A(0, 0)$ 、 $B(3, 4)$ ，點 C 在第四象限， $\overline{AC} = 20$ ， $\cos A = -\frac{7}{25}$ ，則 C 點的坐標為 _____。

B. 電視台推出玩遊戲拿獎金的活動，遊戲規則如下：

連續投擲一個標有 1 點到 20 點的正二十面體公正骰子，若投到第 k 次才出現第一個非質數點，則可以得到 $120 \cdot 2^{k-1}$ 元然後遊戲結束。

請問，玩一次此遊戲的期望值為 _____ 元。

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、已知 $x^{12} - 1 = (x^4 - 1)(x^8 + x^4 + 1)$ 回答下列問題：

(1) 解方程式 $x^8 + x^4 + 1 = 0$ 。(4 分)

(2) 承 (1)，若方程式的所有根中，主幅角最小的根為 z_1 ， $\overline{z_1}$ 表示 z_1 的共軛複數，則 $\left(\frac{1+z_1}{1+\overline{z_1}}\right)^{100} = ?$ (請以 $a+bi$, $a, b \in R$ 形式表示)(4 分)

(3) 承 (2)，若複數 z 滿足 $|z-1|=2$ ，求 $|z-z_1^2|$ 的最大值為？(4 分)

二、設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩數列且 $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ，

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)。$$

(1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$ (4 分)

(2) 證明：對任意正整數 k ， $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ 恆成立。(4 分)

(3) 利用 (2)，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ?$ (4 分)