

林廷數學考試中心
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題
數學考科

109.06.05

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 3 題，多選題 4 題，選填題第 A 至 D 題共 4 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 78 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 空間中有一體積非零之四面體 $ABCD$ ，直線 AB 的方程式 $\frac{x-5}{2} = -y = \frac{z-3}{2}$ ，

試問直線 CD 的方程式可為下列何者？

(1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = z-1$

(2) $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-z=2 \end{cases}$

(3) $\frac{x-3}{-2} = y+1 = \frac{z-3}{-2}$

(4) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=4-t, t \in R \\ z=1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=t \\ y=1, t \in R \\ z=1 \end{cases}$



2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \log_{0.3} (3^{2n} - 2^{3n}) \right]$ 之值為下列何者？

(1) -2

(2) -1

(3) 1

(4) 0

(5) 2

3. 若袋中有大小相同的紅球 n 個、白球 3 個，今一次任取三球，設三球均為白球的機率為 P_n ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ 之值為何？

- (1) $\frac{1}{6}$
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) $\frac{1}{2}$
- (4) $\frac{2}{3}$
- (5) 1

二、多選題（占 32 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 依照過去經驗知大雄投籃命中率為 0.6，若大雄重複投籃 4 次，恰命中 n 次的機率為 a_n ，命中次數的期望值為 E_4 ，標準差為 S_4 ；若重複投籃 8 次，恰命中 n 次的機率為 b_n ，命中次數的期望值為 E_8 ，標準差為 S_8 ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a_0 = a_4$
- (2) $E_8 = 2E_4$
- (3) $S_8 = 4S_4$
- (4) a_2 為 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 中唯一的最大值
- (5) b_5 為 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$ 中唯一的最大值

5. 設 $1+i$ 及 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 為方程式 $x^6 = a$ 之相異六根，且將此六根標示於複數平面上依序可得 $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ ，請選出正確的選項。

(1) $a = -8$

(2) $1-i$ 為 $x^6 = a$ 之根

(3) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = -1-i$

(4) 以 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 為頂點的凸多邊形面積為 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(5) 設 A 點的複數坐標為 i ，則 $\overline{AP_1} \times \overline{AP_2} \times \overline{AP_3} \times \overline{AP_4} \times \overline{AP_5} = 8$

6. 設 $a \in R$ ，三相異平面 $E_1: ax+2y+3z=1$ 、 $E_2: 3x+(a+1)y+z=1$ 、 $E_3: 3x+(a+2)z=1$ ，請選出正確的選項。

(1) 若此三平面恰交一點，則 $a \neq -1, 3, -5$

(2) 若此三平面相異且三平面恰交一線，則 $a = 3$

(3) 當 $a = -5$ 時，此三平面兩兩相交一線，但三交線不共點

(4) 存在一實數 a 使平面 E_1, E_2 的交線垂直平面 E_3

(5) 設 $t \in R$ ，若聯立方程組 $\begin{cases} ax+2y+3z=1 \\ 3x+(a+1)y+z=1 \\ 3x+(a+2)z=1 \\ y-z=t \end{cases}$ 有無限多組解，則 $t = 0$

7. 已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 的一階導函數為 $f'(x)$ ，若 $y = f'(x)$ 的圖形如右，請選出正確的選項。

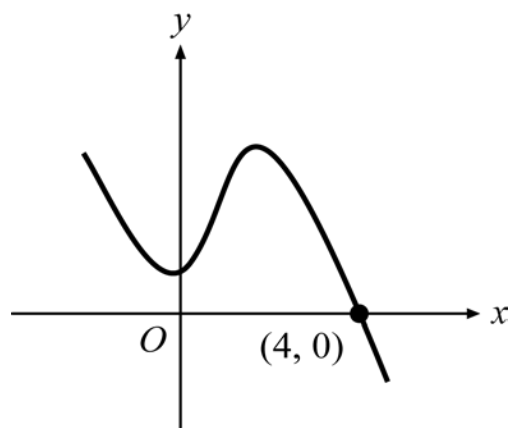
(1) $f(-2) > f(-1)$

(2) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(3) $f(x)$ 的圖形恰有兩個反曲點

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{f(x)} = 0$

(5) $f(x)$ 的最高次項係數必為負



三、選填題（占 28 分）

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」。

2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設 $\vec{a} = (2, -1, 1)$ ， \vec{b} 、 \vec{c} 兩向量的外積 $\vec{b} \times \vec{c} = (3, -5, 7)$ ，則以 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 為相鄰三稜的平行六面體體積 = _____。
- B. 設 $x \in R$ ， $y = \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - 2}{\sqrt{3} \sin x + \cos x + 4}$ ，若 y 有最大值 M ，最小值 m ，則數對 (M, m) = _____。
- C. 設兩函數 $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 5$ 、 $g(x) = 2x^4 + x^3 + 4 + a$ 的圖形恰有四個相異交點，則實數 a 的範圍為 _____。
- D. 設 z_1 、 z_2 為複數， $|z_1| = 2$ 、 $|z_2| = 1$ 且 $|z_1 + z_2| = \sqrt{7}$ ，則 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 =$ _____。

林廷數學

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、設 $A = \begin{bmatrix} 17 & -29 \\ 10 & -17 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ，令 $B = PAP^{-1}$

- (1) 試求矩陣 B
- (2) 試求矩陣 B^{10}
- (3) 試求矩陣 A^{15}

二、圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 5$ 、 $\overline{CD} = 8$ 、 $\overline{DA} \cdot \overline{DC} = 20$ ，點 P 為四邊形 $ABCD$ 內一點，點 P 至 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{DA} 的距離分別為 a 、 b 、 c 、 d 。

- (1) 試求 \overline{AD} 之長。
- (2) 試求四邊形 $ABCD$ 之面積。
- (3) 試求 $9a^2 + b^2 + 16c^2 + d^2$ 之最小值。

林廷數學