林廷數學考試中心

108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題

數學考科

109.06.04

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 3 題，多選題 4 題，選填題第 A 至 D 題共 4 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 66 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 銳角三角形 ABC 中，已知 $\overline{BC}=13$，$\overline{AC}=20$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，則 $\overline{AB}$ 的長度為何？

(1) $\dfrac{16}{3}$

(2) 11

(3) $\dfrac{56}{3}$

(4) 20

(5) 21

2. 袋中有編號 1～10 的號碼球各一顆，每一顆球被取出的機會均等。
甲從袋中每次取一球記錄號碼後放回，共取三次。
設甲在第一球取到 n 號的前提之下，第二、三球至少有一個大於 n 號的機率為 $P(n)$。乙從袋中每次取一球記錄號碼後不放回，共取三次。
設乙在第一球取到 n 號的前提之下，第二、三球至少有一個大於 n 號的機為 $Q(n)$。則下列選項中的值何者最大？

(1) $P(7)$

(2) $P(8)$

(3) $Q(7)$

(4) $Q(8)$

(5) $\dfrac{1}{2}$。

3. a、b、c、k 為實數 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$，已知 $f(k)$ 在 $x=k$ 與 $x=-\frac{1}{k}$ 處均有極值。求 $f(1)-f(-1)$ 的值？

(1) -8

(2) -4

(3) 0

(4) 2

(5) 16。

二、多選題（占 24 分）

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 空間中，$O(0,0,0)$、$A(1,3,0)$、$B(0,3,2)$，則下列哪些選項中的點落在平面 OAB 上，且位於 ΔOAB 內部 (不含邊界)？

(1) $(1,6,2)$

(2) $(\frac{1}{3},2,\frac{2}{3})$

(3) $(\frac{1}{4},\frac{3}{2},1)$

(4) $(\frac{2}{3},\frac{11}{4},\frac{1}{2})$

(5) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{2}{3})$。

5. 設 a、b、c、d 為實數，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在坐標平面上所有的點 $P(x,y)$ 都滿足關係式 $A^2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，則下列選項中的 A，何者必定滿足條件？

(1) $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

(4) $A=\begin{bmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{t^2-1}{1+t^2} \end{bmatrix}$，其中 t 為實數

(5) $A=\begin{bmatrix} s & t \\ 1-s & 1-t \end{bmatrix}$，其中 s、t 為小於 1 的正實數。

6. 考慮多項式 $f(x)=x^2+kx+4$ 其中 k 為實數，已知虛數 α 為方程式 $f(x)=0$ 的一個解。下列選項何者正確？

(1) $f(x)$ 有最小值且此最小值大於 0

(2) k 不可能為 $3\sqrt{2}$

(3) 設 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，則在 xy 坐標平面上，$g(x)$ 之圖形恰有一個反曲點且反曲點位於 $x=-\frac{k}{2}$ 處

(4) 若 $k=0$，則在 xy 坐標平面上，$y=f(x)$ 圖形上的動點 P 與點 $A(0,\frac{11}{2})$ 的距離之最小值為 $\frac{3}{2}$

(5) $|\alpha|$ 必定小於 3。

7. a_i、b_i、c_i、d_i 皆為實數，其中 $i=1$、2、3。在坐標空間中，已知三元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 的解 (x,y,z) 形成的圖形是通過 $(0,0,0)$、$(6,4,2)$ 兩點的直線，請選出正確的選項：

(1) 向量 $\vec{a}=(a_1,b_1,c_1)$ 與 $\vec{b}=(3,2,1)$ 互相平行

(2) 平面 $3x+2y+z=1$ 不可能包含點 (a_1,b_1,c_1)

(3) 由三向量 $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$，$\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)$ 所展成的平行六面體的體積為 0

(4) $x=3$、$y=2$ 是二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 的一組解

(5) 二元一次方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 的解有無限多組。

三、選填題（占 24 分）

說明：1. 第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡上「選擇（填）題答案區」。
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，點 $A(0,0)$、$B(2,-5)$、$C(-2,-5)$、$D(3,4)$，已知動點 P 滿足 $\overline{PD}\perp\overline{AD}$，動點 Q 滿足 $\overline{QB}\perp\overline{QC}$，求 $\overline{PQ}$ 之最小值為 ＿＿＿＿＿＿。

B. a、b、c、t 為實數且 a、b、c 皆大於 1，已知 $a^t=b^{t+1}=c^{t+4}=10$，且 $\log a+\log b+\log c=1$，則 $t^2+4t=$＿＿＿＿＿＿。

C. 函數 $f(x)=\sqrt{-3x^2+6x+9}$，在坐標平面上，設 $y=f(x)$ 之圖形與 x 軸所圍成的區域為 A，則將 A 繞 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為 ＿＿＿＿＿＿π。

D. 袋中有 m 顆紅球，n 顆白球 (其中 m、n 為正整數且 $1\le m\le 9$，$1\le n\le 9$)，每顆球由袋中被取出的機會均等。有一個遊戲，其規則為：
由袋中每次取一球，記錄取出的球的顏色之後將球放回袋中，共取三次，若三次之中有 k 次是紅色 (另外 $(3-k)$ 次是白色，其中 $k=0$，1，2，3)，則得分為 $(8k-6)$ 分。已知此遊戲得分的期望值為 4 分，則
$m=$＿＿＿＿＿＿，$n=$＿＿＿＿＿＿。

第貳部分：非選擇題（占 34 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。
作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、a、b、c 為實數，$0 \le x \le 2\pi$，已知 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$ 的最大值為 3，最小值為 -1，且最大值發生在 $x=\dfrac{11\pi}{6}$ 時：

(1) 分別求出 a、b、c 的值。(6 分)

(2) $(a+bi)^7=$？ (6 分)

二、數列 $<a_n>$ 滿足 $a_n=\dfrac{n^2-1}{(n+1)!}$，其中 n 為正整數，$(n+1)!=1\times 2\times\cdots\times(n+1)$。設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，因此 $S_1=a_1=0$，$S_2=a_1+a_2=\dfrac{1}{2}$，$\cdots$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 將 S_n 通分之後約分至最簡。

(1) 分別求出 S_3、S_4 的值。(7 分)

(2) 寫出 S_n 的一般式，並證明你的結論。 (7 分)

(3) 求 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 之值。(7 分)