

林廷數學考試中心
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題
數學考科

109.05.28

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 4 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 B 題共 2 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 62 分）

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $a > 0$ ，函數 $y = a^x$ 的圖形上兩點 A 與 B 的 y 坐標分別為 3 與 75，已知直線 AB 的斜率為 36，則 a 之值為下列哪個選項？

- (1) 2
- (2) 3
- (3) 4
- (4) 5
- (5) 6

2. 一老鷹於空間坐標原點 $O(0, 0, 0)$ 發現一麻雀正由點 $A(-1, -3, -3)$ 往點 $B(2, 0, -3)$ 方向直線前進，此時老鷹立刻由原點出發前去抓麻雀，已知老鷹飛行 k 單位後抓到麻雀，則 k 之最小值為下列哪個選項？

- (1) $\sqrt{3}$
- (2) 3
- (3) $\sqrt{11}$
- (4) $\sqrt{13}$
- (5) $\sqrt{19}$

3. 設平面上兩向量 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 120° ， $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 4$ ，若 $\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$ ， $\vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ，則 \vec{x} 在 \vec{y} 上之正射影長為下列哪個選項？

- (1) $\sqrt{12}$
- (2) $\sqrt{13}$
- (3) $\sqrt{37}$
- (4) 7
- (5) 9

4. 下列哪個選項的函數值域為 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1, y \text{ 實數}\}$?

(1) x 為任意實數，函數 $y = 4\sin x \cos x$

(2) 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ 的範圍，函數 $y = \sin x + \cos x$

(3) x 為任意實數，函數 $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sin x$

(4) x 為任意實數，函數 $y = \sin^2 x - 2\cos x + 1$

(5) 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 的範圍，函數 $y = \cos x + \frac{1}{\cos x}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 空間中兩點 $A(2, 1, 1)$ 、 $B(3, 1, -1)$ 及一平面 $E: x + 2y + 2z + 3 = 0$ ，設 A 、 B 兩點在平面 E 之投影點分別為 A' 、 B' ，請選出正確的選項。

(1) \overline{AB} 與平面 E 有交點

(2) $\overline{AB} = 3$

(3) $\overline{AA'} > \overline{BB'}$

(4) $\overline{A'B'} = 1$

(5) 若 P 是平面 E 上之動點，則當 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 有最大值時， P 點坐標為 $(5, 1, -5)$

6. 擲一公正骰子三次，設 A 表第一次出現點數是 1 或 2 的事件， B 表第二次出現點數是 3 或 4 的事件， C 表第三次出現點數是 5 或 6 的事件，請選出正確的選項。

(1) $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

(2) $P(A|B) = \frac{1}{6}$

(3) 事件 A 、 B 獨立

(4) 事件 B 、 C 互斥

(5) $P(A \cup B \cup C) = \frac{19}{27}$

7. 設四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 120^\circ$ ，請選出正確的選項。

(1) $\overline{BC} \cdot \overline{CD} = -4$

(2) $\overline{BD} = 2\sqrt{7}$

(3) $\sin \angle CBD = \frac{\sqrt{21}}{14}$

(4) $\triangle CBD$ 之外接圓面積為 $\frac{3}{28}\pi$

(5) 四邊形 $ABCD$ 之面積最大值為 $7 + 2\sqrt{3}$

8. 設 $f(x)$ 為實係數多項式，請選出正確的選項。

(1) 若 $f(2-i) < 0$ ，則 $f(2+i) < 0$

(2) $f(i) \cdot f\left(\frac{1}{i}\right) \geq 0$

(3) 若 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有交點，則 $f(x) = 0$ 有實根

(4) 若 $a < b$ 且 $f(x) = 0$ 在 a 與 b 之間沒有實根，則 $f(a) \cdot f(b) \geq 0$

(5) 若 $f(x)$ 沒有整係數一次因式，則 $f(x) = 0$ 沒有實根

9. 設箱子內有編號 1、2、3、4、5、6 大小相同的球共 6 個，分別代表六個函數 $f_1(x) = x$ ， $f_2(x) = x^4$ ， $f_3(x) = x^3$ ， $f_4(x) = \sin x$ ， $f_5(x) = \cos x$ ， $f_6(x) = \csc x$ (其中 $x \neq n\pi$ ， n 為整數)。今從箱中任取一球，取後不放回，每球被取到機會均等，當取到球號代表的函數為奇函數，則停止取球，否則繼續進行。設隨機變數 X 為取球的次數，請選出正確的選項。

(1) $P(X=1) > \frac{1}{2}$

(2) 隨機變數 X 的期望值 $E(X) > 2$

(3) 隨機變數 X 的變異數 $Var(X) > \frac{9}{25}$

(4) 隨機變數 $Y = 5X + 6$ 的期望值 $E(Y) > 13$

(5) 隨機變數 $Y = 5X + 6$ 的變異數 $Var(Y) > 9$

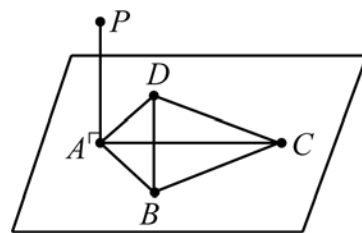
三、選填題 (占 12 分)

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (8-17)。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，有一點 P 坐標為 $(-3, 1)$ ，圓 C 方程式為 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 。設動點 A 、 B 是圓 C 上直徑的兩端點，則 ΔPAB 面積的最大值為 _____。

B. 如圖， \overline{PA} 與四邊形 $ABCD$ 所在之平面垂直， $PA = \frac{9}{14}$ ， $\overline{AB} = \overline{AD} = 1$ ， $\overline{CB} = \overline{CD} = \sqrt{3}$ ， $\angle ABC = 150^\circ$ ，則 P 點到直線 BD 之最短距離為 _____。(化為最簡分數)



第貳部分：非選擇題（占 38 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、某球團紀錄甲投手的比賽狀況如下：

- (A) 前一場勝投，則下一場勝投的機率為 $\frac{3}{5}$ ，敗投的機率為 $\frac{2}{5}$ ，無關勝負的機率為 0
- (B) 前一場敗投，則下一場勝投的機率為 $\frac{2}{5}$ ，敗投的機率為 $\frac{1}{2}$ ，無關勝負的機率為 $\frac{1}{10}$
- (C) 前一場無關勝負，則下一場勝投的機率為 $\frac{2}{5}$ ，敗投的機率為 $\frac{2}{5}$ ，無關勝負的機率為 $\frac{1}{5}$

根據以上資料，試回答下列問題：

- (1) 若甲投手第一場敗投，試求之後三場皆勝投的機率。(6 分)
- (2) 若甲投手第一場勝投，試求第三場勝投的機率。(6 分)
- (3) 長期而言，當甲投手比賽狀況趨向穩定，試求他勝投的機率。(7 分)

二、設複數 $z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}-i}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$

- (1) 若 $z_0^3 + \frac{2}{z_0} = a + bi$ ，其中 $a、b$ 為實數，試求數對 (a, b) 。(6 分)
- (2) 設 $z_0、z_0^3$ 與 $\frac{2}{z_0}$ 在複數平面上對應的點分別為 $A、B$ 與 C ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。(6 分)
- (3) 試求複數 z ，使得 $|z - z_0| = 3$ 且 $|z|$ 為最小。(7 分)