林廷數學考試中心
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學乙全

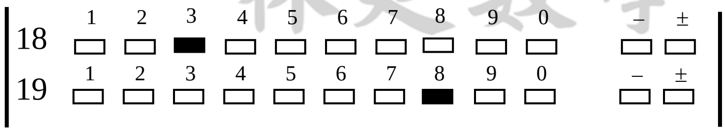
考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 3 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 C 題共 3 題，非選擇題 2 題。

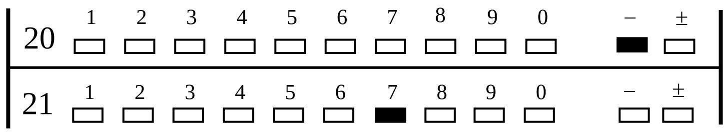
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 15 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $<a_i>$ 為一各項均為實數的等比數列，第四項為 1，第七項為 27，

$\log_k a_1+\log_k a_2+\log_k a_3+\cdots+\log_k a_{32}=-100$，則 $k=$？

(1) $\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{9}$

(3) $\dfrac{1}{27}$

(4) $\dfrac{1}{81}$

(5) $\dfrac{1}{243}$

2. 某地區的報紙只有甲、乙、丙三家業者，而且此地區每一戶都必定訂閱一種報紙。若依長期經驗，這個月訂甲報紙的客戶，下個月有 30% 會續訂甲報紙，有 60% 會改訂乙報紙；這個月訂乙報紙的客戶，下個月有 40% 會續訂乙報紙，有 30% 會改訂丙報紙；這個月訂丙報紙的客戶，下個月有 70% 會續訂丙報紙，有 10% 會改訂甲報紙。若多年前訂甲報紙的客戶有 3000 戶，訂乙報紙的客戶有 8000 戶，訂丙報紙的客戶有 3000 戶，且這些年該地區訂報的總戶數都沒有變動，則下列關於此地目前訂報情形的敘述，何者正確？(視為已穩定狀態)

(1) 訂甲報的應有 2000 戶

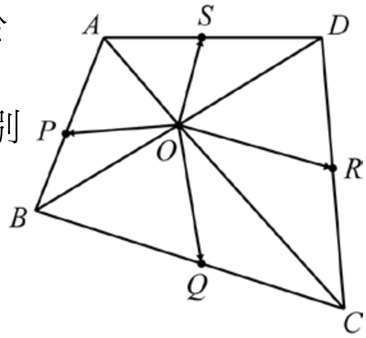
(2) 訂乙報的戶數最多

(3) 訂丙報的應有 6000 戶

(4) 下個月訂乙報的應有 7000 戶

(5) 三個月後訂乙報的應比訂甲報的多 4000 戶。

3. 在右圖，任意凸四邊形 $ABCD$ 之兩對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 交於 O，已知 $\overline{AO}:\overline{OC}=1:3$，$\overline{BO}:\overline{OD}=2:3$，$P$、$Q$、$R$、$S$ 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$，四邊上之任意點，若將由 O 至 P、Q、R、S 四點所形成之向量 $\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$ 分別表示為 $x\overline{OA}+y\overline{OB}$ 形式，$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$、$\overline{OR}$、$\overline{OS}$ 各有所不同的 x，y 係數，下列各敘述何者正確？



(1) 所有 $x+y$ 的可能值中最小者為 -5

(2) 所有 $x+y$ 的可能值中最大者為 $\dfrac{3}{2}$

(3) 只有在 R 恰好為 $\overline{CD}$ 邊之中點時，$x+y$ 才有最小值

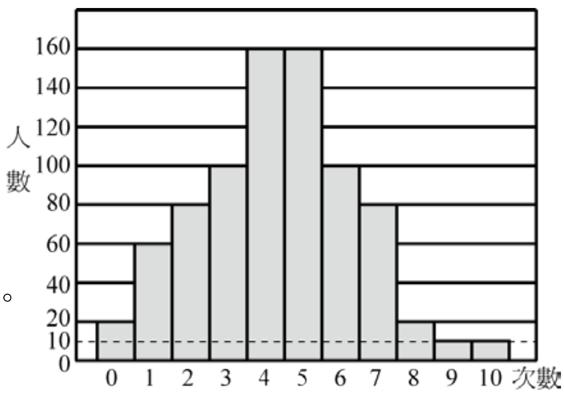
(4) $\overline{OQ}$ 的 x^2+y^2 之最大值為 9

(5) $\overline{OQ}$ 的 x^2+y^2 之最小值為 1。

二、多選題（占 30 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 某市各中等學校每學年的高一學生，皆以罰球線投籃 10 次的命中次數做為第一學期體育的期末考成績，實施多年後，所得的統計資料分析：『命中 k 次的人數與總人數之比值』恰與二項分配『重複試驗 10 次，每次成功之機率為 $\frac{2}{5}$』中成功 k 次的機率相同。今某高中一年級學生 800 人，每個同學投籃 10 次，其命中次數與人數統計圖如右。則下列選項哪些是正確的？



(1) 若在該高中一年級學生中隨機選取 1 人，其投籃命中次數超過 6 次之機率為 $\frac{3}{10}$

(2) 由二項分配知，投籃命中次數的期望值為 4 次

(3) 由二項分配知，投籃命中次數的標準差為 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(4) 該高中一年級學生，其投籃命中次數在『二項分配平均數正負兩個標準差之間』所占的人數百分比為 92.5%

(5) 今在該高中一年級學生中隨機選取 25 位學生，每個學生投一球，結果有 9 人投中，在 95% 的信心水準下，該高中一年級學生投籃命中率的信賴區間為 $[0.18, 0.54]$

(95%信心水準下的信賴區間：$[\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$)

5. 函數 $f(x)=a\sin(bx+\theta)+c$ $(a>0$、$b>0$、$0<\theta<2\pi)$，若 $f(x)$ 在某一週期內，當 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 時，有最大值 3，當 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 時，有最小值 -1，則下列選項哪些是正確的？

(1) $a=2$
(2) $b=2$
(3) 圖形對稱 $x+\dfrac{5\pi}{12}=0$
(4) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$
(5) 其圖形可由 $y=2\sin(2x)+1$ 向右平移 $\dfrac{5\pi}{6}$ 而得。

6. 空間中有四點 $A(1,5,3)$，$B(0,2,3)$，$C(4,1,0)$，$O(0,0,0)$，則下列敘述哪些是正確的？

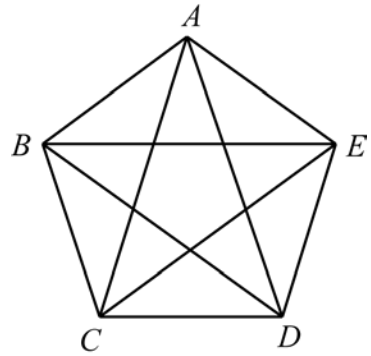
(1) A、B、C 所有平面之法向量可為 $(9,-3,13)$
(2) $\angle BAC<60^\circ$
(3) 若 a、b 為實數，且 $O(3,a,b)$ 與 A、B、C 共平面，則點 $(0,0,0)$ 到平面 $ax+by-12=0$ 的最大距離為 $2\sqrt{178}$
(4) 四面體 $O-ABC$ 的體積為 33
(5) 直線 OA 與直線 BC 之最短距離為 $\dfrac{11}{\sqrt{90}}$。

7. 下列關於矩陣的敘述，哪些是正確的？

(1) 對所有的實數 a，矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ a^2+1 & a+2\end{bmatrix}$ 必定有乘法反矩陣
(2) 若 $A=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ -\sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}$，則 $A^{2012}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
(3) 若 $B=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{bmatrix}$，則 $B^{2012}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
(4) 若 $A=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ -\sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{bmatrix}$，則 $A^{2012}B^{2012}=B^{2012}A^{2012}$
(5) 若 $A=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ -\sin60^\circ & \cos60^\circ\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{bmatrix}$，則 $(A^{-1})^{2012}(B^{-1})^{2012}=B^{2014}A^{2014}$。

8. 如右圖，$ABCDE$ 為一邊長為 1 的正五邊形，其內部再按 $ACEBDA$ 的順序連接五段線段形成一個五角星，下列敘述哪些是正確的？

$(\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4})$



(1) 正五邊形 $ABCDE$ 的內切圓半徑與外接圓半徑之比值大於 $\dfrac{3}{4}$

(2) 五角星 $ACEBDA$ 的每一段(例如 $\overline{AC}$)長為 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(3) 五角星 $ACEBDA$ 的一段 $\overline{BE}$ 被 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AD}$ 三等分

(4) 若 $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，則 x，y 滿足 $x-y=\dfrac{1}{x}$

(5) 若將正五邊形 $ABCDE$ 置於坐標平面上且使得 $C(0,0)$、$D(1,0)$，則對正五邊形 $ABCDE$ 及其內部區域內之所有點 $P(x,y)$，當 $P=A$ 時，可使 $\sqrt{3}x-3y$ 有最大值。

三、選填題（占 15 分）

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (10 ～15)。 2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 a 為正整數，若方程組 $\begin{cases}2x+y-z=ay\\ x+ay+3z=2y\\ 4x+2y+az=0\end{cases}$ 表示三相異平面交一直線，則 a 之值為 ＿＿＿＿＿。

B. 在複數平面上，A、B、C 三點所對應的複數依序為 z_1、z_2、z_3，若 $|z_1|=3$，$z_2=\overline{z_1}$，$z_3=\dfrac{1}{z_1}$，則 ΔABC 面積之最大值為 ＿＿＿＿＿。

C. 設 $\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$，若 $y=3-2\sin\theta+2\cos\theta-6\sin\theta\cos\theta$ 的最小值為 m，最大值為 M，則數對 $(m,M)=$＿＿＿＿＿。

第貳部分：非選擇題（占 40 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。 作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、設 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta+3}{\cos\theta}$，$\dfrac{-\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，

(1) 令 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$，$\dfrac{-\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，試求點 (x,y) 所成曲線圖形的長度。(5 分)

(2) 求 $f(\theta)$ 的最小值。(6 分)

(3) 當 $f(\theta)$ 有最小值時，$\sin\theta+\cos\theta=$？(6 分)

二、老師設計一遊戲，準備了五個問題，規定答對第 i 題 ($i=1$，2，3，4，5) 則得 3^{i-1} 分，假設每位學生答對任一問題之機率為 $\dfrac{2}{3}$，今依下列規則進行遊戲：

(I) 每答對第 i 題，才可以進行第 $i+1$ 題 ($i=1$，2，3，4，如不想答下一題，則可停止遊戲，而以累計所得分數為得分；今每位學生想答或不想答下一個問題的機率各為 $\dfrac{1}{2}$。

(II) 若答錯任何一題，則前面所得分數全部消失，歸為 0 分，遊戲也隨之結束。

(III) 若五題連續答對，遊戲自然結束，分數為五次得分總和。

試回答下面問題：

(1) 遊戲中學生所能得到的最高分為幾分？(5 分)

(2) 大雄參加此一遊戲，則他答對到第四題而不答第五題之機率為何？(6 分)

(3) 已知胖虎在遊戲結束後有得分(即得分非 0 分)，則他拿到最高分的機率為何？(6 分)

(4) 靜香躍躍欲試，也想參加遊戲，則靜香得分的期望值為何？(6 分)