

林廷數學考試中心  
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題  
數學考科

109.06.15

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 4 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 B 題共 2 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\square^3$  與第 19 列的  $\square^8$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\square^-$  與第 21 列的  $\square^7$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 66 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設樣本空間  $S$  中的兩事件  $A$ 、 $B$  為獨立事件，若  $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ，

則  $P(B|A') = ?$

- (1)  $\frac{3}{4}$
- (2)  $\frac{2}{3}$
- (3)  $\frac{1}{2}$
- (4)  $\frac{1}{4}$
- (5)  $\frac{1}{6}$

2. 設  $a$ 、 $b$  為兩相異正整數，且  $500 < a < 600$ ，若  $\log_3 a$ 、 $\log_9 b$ 、 $\log_{27} a$  成等差數列，則  $b = ?$

- (1)  $2^3$
- (2)  $2^4$
- (3)  $2^7$
- (4)  $2^{12}$
- (5)  $2^{16}$

3. 在空間中有兩個平行平面  $E_1$  與  $E_2$ ，已知其  $x$  截距的差為 1， $y$  截距的差為 2， $z$  截距的差為 3，試求兩平行平面  $E_1$  與  $E_2$  的距離為何？

(1)  $\frac{1}{7}$

(2)  $\frac{3}{7}$

(3)  $\frac{4}{7}$

(4)  $\frac{6}{7}$

(5) 1

4. 已知  $k \in N$  且  $1 \leq k \leq n$ ，已知  $C_k : (x - \sqrt{k})^2 + (y - 2n)^2 = 1$ ， $L_k : 2nx - \sqrt{k}y = 1$ ，其中  $O_k$  表示  $C_k$  的圓心，若  $d(O_k, L_k)$  表示圓心  $O_k$  到直線  $L_k$  的最短距離，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d(O_k, L_k)$  之值為何？

(1) 0

(2)  $\frac{1}{3}$

(3)  $\frac{1}{2}$

(4)  $\frac{2}{3}$

(5)  $\frac{3}{4}$

林廷數學

## 二、多選題（占 30 分）

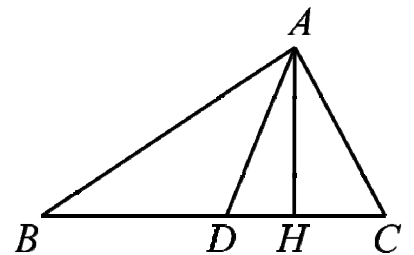
說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 4 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 請選出正確的選項：

- (1) 無窮實數級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  如果收斂，則數列  $\langle a_n \rangle$  必收斂到 0
- (2) 數列  $\langle a_n \rangle: a_1 = 2$  且  $a_{n+1} = 4a_n - 3$ ，則  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- (3) 設  $a, m, n$  皆為實數， $m \neq n$ ，若  $f'(a)$  存在，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h}$  存在，且其極限值為  $(m-n)f'(a)$
- (4) 設  $a$  為實數，若導數  $f'(a)$  存在，則  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h} = 0$
- (5) 若函數  $f, g, h$  滿足  $f(x) < g(x) < h(x)$ ，且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$  皆存在，則  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  也存在

6. 在  $\triangle ABC$  中，已知  $D$  在線段  $\overline{BC}$  上， $\overline{AH}$  為  $\overline{BC}$  邊上的高，若線段長度  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{DC}$  成等比數列，線段長度  $\overline{BD}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{DC}$  成等差數列，若  $\overline{AH} = \frac{6\sqrt{14}}{5}$ ，且  $\triangle ABC$  的面積為  $6\sqrt{14}$ ，請選出正確的選項：

- (1)  $\overline{BD} = 7$
- (2)  $\overline{AB} = 9$
- (3)  $\overline{DC} = 4$
- (4)  $\triangle ABC$  的內切圓半徑為  $\frac{\sqrt{14}}{3}$
- (5)  $\triangle ABC$  的外接圓半徑為  $\frac{75}{\sqrt{14}}$



7. 已知複數  $z_1$  為 1 的 8 次方根， $z_2$  為 16 的 4 次方根。今在高斯平面上，若點  $P$  表示複數  $z_1$ ，點  $Q$  表示複數  $z_2$ ，點  $O$  為原點，則  $\triangle OPQ$  的面積可能為何？

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 2
- (4)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (5)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

8. 下列關於實係數多項式  $f(x) = 3 \times \frac{(x-1)(x-3)(x-7)}{(-2-1)(-2-3)(-2-7)} - 5 \times \frac{(x+2)(x-3)(x-7)}{(1+2)(1-3)(1-7)}$  的敘述，請選出正確的選項：

- (1) 多項式  $f(x)$  的次數為 3 次
- (2)  $f(x)$  除以  $x-1$  的餘式為 5
- (3) 滿足不等式  $f(x) \geq 0$  的正整數  $x$  共有 4 個
- (4) 方程式  $f(x) = 1-x$  恰有 2 個正實根
- (5) 方程式  $f(x^2) = 0$  恰有 6 個實根

9. 已知  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ， $\forall n \in N$ ，請選出正確的選項：

- (1)  $a_n > c_n$ ， $\forall n \in N$
- (2)  $a_n = d_n$ ， $\forall n \in N$
- (3)  $a_6 = 364$
- (4)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n$  必可表示成  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  的形式，其中  $p, q, r, s$  是實數
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{c_n} = 1$

### 三、選填題（占 12 分）

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」。  
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 有一個平行六面體  $ABCD-EFGH$ ，已知四邊形  $ABCD$  與  $ADHE$  皆為長方形，若  $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ， $\overline{AD} = \sqrt{3}$ ，且  $\overline{AC} \cdot \overline{AH} = 0$ ， $\overline{AF} \cdot \overline{AH} = -1$ ，試求  $\overline{AE}$  之值為 \_\_\_\_\_。
- B. 設  $t, s$  皆為實數，已知方程式  $x^2 + tx + s = 0$  有兩實根為  $\alpha, \beta$ ，且  $\alpha^2 + \beta^2 < 2$ ，若滿足如此條件的所有數對  $(s, t)$  在  $xy$  平面上的圖形為  $T$ ，則  $T$  繞  $x$  軸旋轉一圈所得旋轉體的體積為 \_\_\_\_\_。

### 第貳部分：非選擇題（占 34 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

#### 一、解題遊戲：

本遊戲共有 5 題，需依序作答。每答對 1 題得 1 分，並得以繼續答下一題，答錯則扣 1 分。每題得扣分後，若累計的分仍為正分，則一定要繼續答題，而累計得分為 0 分或負分或做完第五題，則遊戲結束。

例如：第一、二兩題皆答對，則即使第三題錯，仍要繼續做第四題，若第四題又錯，則累計得分為 0 分，遊戲結束。

假設每題做對或做錯的機率各半，且各題答題對錯的機率皆為獨立，參加者一開始分數為 0 分，並從第一題作答，若答錯，遊戲結束；答對則得 1 分並可繼續解第二題。

請問：參加此遊戲

- (1) 可做到第五題的機率為何？(6 分)
- (2) 當遊戲結束時，參加者可做題數的期望值為幾題？(7 分)

二、(1) 已知一可微分函數  $f$  滿足： $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，其中  $x, y$  為任意的實數，若導數  $f'(0) = 4$ ，則函數  $f(x)$  為何？(7 分)

(2) 在坐標平面上，已知三次多項式函數  $g(x)$  的圖形在點  $(0, 0)$  產生極值，而點  $(1, 4)$  為其反曲點，則函數  $g(x)$  為何？(7 分)

(3) 承上述題目 (1)、(2) 中的函數  $f(x)$  與  $g(x)$  圖形所圍出的面積為何？(7 分)