

林廷數學考試中心  
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題  
數學考科

109.06.12

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 4 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 B 題共 2 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\overset{3}{\square}$  與第 19 列的  $\overset{8}{\square}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\overset{-}{\square}$  與第 21 列的  $\overset{7}{\square}$  畫記，如：

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 在  $\triangle ABC$  中， $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊長，且滿足  $b^2 + c^2 = 3a^2$ ，則  $\cos A$  的最小值是？

- (1)  $\frac{2}{3}$
- (2)  $\frac{1}{3}$
- (3)  $\frac{1}{2}$
- (4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (5)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



2. 空間中，滿足方程式  $(xy - 2y)^2 + (yz - 2z)^2 = 0$  的所有實數解之動點  $P(x, y, z)$  所構成的圖形為何？

- (1) 一個圓
- (2) 三個點
- (3) 兩直線
- (4) 三直線
- (5) 一平面

3. 平面坐標上，設  $Q(0, -3)$ 、 $P(x, y)$  為滿足不等式  $2|x-1|+3|y-3|\leq 6$  的動點。若直線  $\overline{PQ}$  的斜率  $m_{PQ}$  為整數，則  $m_{PQ}$  的可能值有幾個？

- (1) 4
- (2) 5
- (3) 6
- (4) 7
- (5) 無限多個

4. 在複數平面上，兩個非零複數  $z_1$  與  $z_2$  皆在以點  $(-2, 0)$  為圓心，半徑為 2 的圓上，若已知  $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$  為實數，且  $\text{Arg}(z_1) = \frac{5\pi}{6}$ ，則  $z_2 = ?$

- (1)  $-\sqrt{3} - i$
- (2)  $-\sqrt{3} + i$
- (3)  $-3 - \sqrt{3}i$
- (4)  $-3 + \sqrt{3}i$
- (5)  $-\sqrt{3} - 3i$



## 二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 6 分；答錯 2 個選項者，得 4 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 若直線  $x \cos \theta - y \sin \theta = \cos \theta \sin \theta$ ， $(0 \leq \theta < 2\pi)$  與圓  $x^2 + y^2 = \frac{3}{16}$  有交點，則下列哪些可以是  $\theta$  的取值範圍？

(1)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

(2)  $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

(3)  $\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$

(4)  $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3}$

(5)  $\frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$

6. 某班座號 1~10 號同學中，恰有 3 位女生，7 位男生，開學第一天，老師從這 10 位同學中隨機抽取座號並分配不同的服務工作；若在第  $k$  次時抽中女學生且之前已有一位女學生被抽中的機率  $P_k = P(X = k)$ ，其中  $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ 。請選出正確的選項？

(1) 隨機變數  $X$  的所有可能取值中，使得  $P_k \neq 0$  的最大  $k$  值為 10

(2)  $P_3 = \frac{7}{60}$

(3)  $P_k$  可表示為  $k$  的一元二次函數其中  $k = 1, 2, 3, \dots, 10$

(4) 若  $P_k \neq 0$  且  $P_{10-k} \neq 0$  則  $P_k = P_{10-k}$

(5)  $E(X) = 5$

7. 空間中相異四點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ，令  $\vec{a} = \overline{AB}$ 、 $\vec{b} = \overline{AC}$ 、 $\vec{c} = \overline{AD}$ 。請選出正確的選項？

- (1) 若  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ，則  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點必共線
- (2) 「 $\vec{a}$  在  $\vec{b} \times \vec{c}$  上的正射影長」等於「四面體  $B-ACD$  中過頂點  $B$  的高」
- (3)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  的值等於「以  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  所張之平行六面體的體積」
- (4) 以  $\vec{a} = (1, 1, -2)$ ， $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ， $\vec{c} = (-1, 3, 1)$  所張之平行六面體恰有四個面為矩形
- (5) 由  $\vec{a} = (1, 1, 1)$  及  $\vec{b} = (k, 2, 1)$  所張的三角形面積必小於  $\frac{1}{2}$

8. 設  $g(x) = x^3 + ax + 2$  及  $h(x) = x^2 + mx + n$  兩個正整係數多項式，而且已知方程式  $f(x) = g(x)h(x) = 0$  至少有一個有理根，且有一個虛根  $x = -1 + 2i$ 。請選出正確的選項？

- (1)  $m + n = 7$
- (2)  $f(x) = 0$  恰有兩個虛根
- (3)  $f(x)$  除以  $x + 3$  的餘式是 224
- (4)  $f(x)$  除以  $x^2 + 2x + 4$  的餘式是  $x + 10$
- (5) 至少存在一實數  $\alpha$ ，使得當  $x > \alpha$  時， $f(x)$  的函數值恆大於 0

9. 平面坐標上，已知  $y = |\frac{1}{2}x - 3| + |\frac{1}{2}x + 2|$  的圖形有一部分為水平線段，其左、右兩端點分別為  $B$  點、 $C$  點；在  $B$  點左側的圖形上取一點  $A$ ，在  $C$  點右側的圖形上取一點  $D$ ，使由左而右依次為  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ，其中  $\overline{AB} < \overline{CD}$ 。請選出正確的選項：

- (1)  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
- (2) 當  $x = \sqrt{35}$  時， $y$  的值為無理數
- (3) 當光束由  $D$  點發射通過  $C$  點，再碰到  $x$  軸後的反射光必通過  $B$ 、 $A$  兩點
- (4) 「 $\overline{CA}$  在  $\overline{CD}$  上的正射影長」等於「 $\overline{CB}$  在  $\overline{CD}$  上的正射影長」
- (5)  $\overline{CA} \cdot \overline{CD} > \overline{CB} \cdot \overline{CD}$

### 三、選填題（占 12 分）

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」。  
2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 已知  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  為 1, 2, 3, 4, 5 的排列，在  $a_4, a_5$  為偶數的條件下，滿足  $a_1 > a_2 < a_3$  且  $a_4 < a_5$  的機率為 \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)
- B. 設平面  $E: x + by + cz + k = 0$  與  $xy$  平面垂直，且平面  $E$  與平面  $z = 1$  相交的直線為  $L$ ，若  $L$  的方向向量  $(2, 1, 0)$ ，而平面  $E$  的  $y$  截距為 3，則序對  $(b, c, k) =$  \_\_\_\_\_。

### 第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。  
作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、設  $a, b$  為相異兩正整數，若  $\log_{10} a + \log_{10} b = 2$  且  $\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = \log_2 5$

(1) 試求  $a$  之值。(3 分)

(2) 試求  $a^{(\log b)^2} \times b^{\log b^2} \times b^{(\log a)^2}$  之值。(7 分)

二、小明和小華各有一個不透明布袋，小明的甲袋內裝有 1 白球 1 紅球，小華的乙袋內裝有 2 白球，今約定兩人玩遊戲規則如下：

每一局開始，先由小明投擲一公正骰子，若擲出點數小於 3，則小華由甲袋摸取一球放入乙袋，再由小明由乙袋摸取一球放回甲袋；若擲出點數大於或等於 3，則小華由甲袋摸取兩球放入乙袋，再由小明由乙袋摸取兩球放回甲袋如此稱為一局。

設每次每個球被取的機會均等，求：

(1) 一局後紅球仍在甲袋的機率。(3 分)

(2) 若遊戲開始前小明先拿 60 元，小華也拿出 40 元當賭注，兩人約定好，一局結束後，袋中有紅球的人可以獲得全部的 100 元，求玩一局後小明賺或賠的期望值是多少元。(3 分)

(3) 若此遊戲持續進行多少次後(即長期而言)，紅球在甲袋的機率為何。(8 分)