

林廷數學考試中心
108 下學期指考數學(甲)模擬測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一~第四冊、選修數學甲全

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 4 題，選填題第 A 至 B 題共 2 題，非選擇題 2 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
21	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 70 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設兩複數 α ， β 在複數平面上所對應的點分別為 A ， B ，而 O 點為原點。

若 $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \sqrt{3}i$ ，則 $\angle OBA$ 等於下列哪個選項？

- (1) $\frac{\pi}{6}$
- (2) $\frac{\pi}{3}$
- (3) $\frac{\pi}{2}$
- (4) $\frac{2\pi}{3}$
- (5) $\frac{5\pi}{6}$



2. 在 $\triangle ABC$ 中，設 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之三對邊長分別為 a 、 b 、 c 。若 $\triangle ABC$ 的

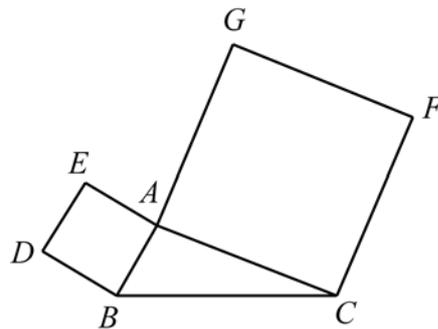
外接圓半徑為 1，則 $(a^2 + 2b^2 + 3c^2)\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{2}{\sin^2 B} + \frac{3}{\sin^2 C}\right)$ 的最小值為何？

- (1) 36
- (2) 72
- (3) 108
- (4) 144
- (5) 180。

3. 在右圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{CA}=7$ ；四邊形 $ABDE$ 及四邊形 $ACFG$

為正方形，則 $\overline{BE} \cdot \overline{CG}$ 之值為何？

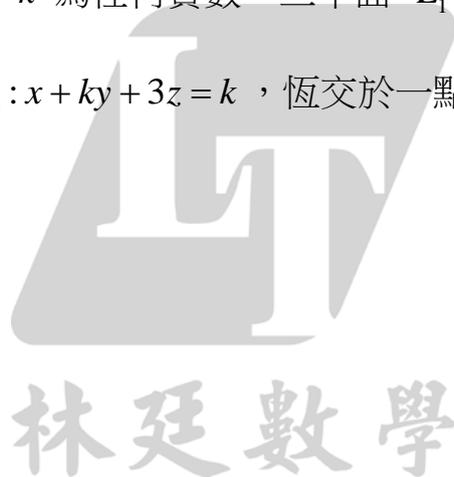
- (1) $15\sqrt{3}$
- (2) $18\sqrt{3}$
- (3) $21\sqrt{3}$
- (4) $24\sqrt{3}$
- (5) $27\sqrt{3}$ 。



4. 設 m 為整數。若不論 k 為任何實數，三平面 $E_1: x+my-z=3$ ，

$E_2: 2x+3y+kz=5$ ， $E_3: x+ky+3z=k$ ，恆交於一點，則 m 的所有可能值的個數為何？

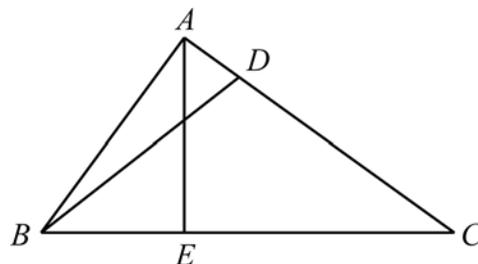
- (1) 3
- (2) 8
- (3) 13
- (4) 18
- (5) 23。



5. 如右圖所示，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 為直角， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{EC} = 1$ ，

則 \overline{AC} 的長度為何？

- (1) $\sqrt{2}$
- (2) $\sqrt{3}$
- (3) $\sqrt[3]{2}$
- (4) $\sqrt[3]{3}$
- (5) $\sqrt[3]{5}$ 。



二、多選題（占 20 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 同時擲 $n (n \geq 2)$ 枚均勻的硬幣， A_n 表事件「至少出現 $n-1$ 個正面」； B_n 表事件「不是全為正面且不是全為反面」，則下列哪些選項是正確的？

(1) $P(A_3) = \frac{1}{4}$

(2) $P(B_4) = \frac{7}{8}$

(3) $P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8}$

(4) A_3 與 B_3 為獨立事件

(5) A_4 與 B_4 為獨立事件。

7. 多項式 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 2$ ，其中 p, q 為實數，若 $f(x) = 0$ 有二虛根

α, α^2 ，且 $f(x)$ 可改寫成 $a \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + b \times \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$

$+ c \times \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + d \times \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$ ，其中 a, b, c, d 為實數。試問

下列哪些選項是正確的？

(1) $\alpha^3 = 1$

(2) $p = 3$

(3) $q = 4$

(4) $a = 3$

(5) $b = 9$ 。

8. A, B, X 是三個二階方陣。已知 $A = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & -\cos 120^\circ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 而 x

滿足 $AX = B$, 試問下列哪些選項是正確的?

(1) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) B 的反矩陣等於 B^3

(3) $X = AB$

(4) x 所對應的平面變換是旋轉

(5) 若 X 將直線 $L: y = \sqrt{3}x$ 變換至直線 L' , 則 L' 與 L 垂直。

9. 設 p, q, r 均為實數。已知坐標空間中三向量 $\overline{OA} = (p, 0, q)$, $\overline{OB} = (r, p, 0)$,

$\overline{OC} = (1, 1, 1)$, 其中 \overline{OA} 與 \overline{OB} 的長度均為 1 且 $\angle AOC = \angle BOC = 45^\circ$ 。試問下列哪些選項是正確的?

(1) $p + r = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $pr = \frac{1}{3}$

(3) $\cos \angle AOB = \frac{1}{4}$

(4) $\overline{OC} \cdot (\overline{OA} \times \overline{OB}) = \frac{3}{4}$

(5) 由 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 三向量所展成的平行六面體體積為 $\frac{5}{6}$ 。

三、選填題（占 20 分）

說明：1. 第 A 至 B 題，將答案畫記在答案卡上「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (10 ~15)。

2. 每題完全答對給 10 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. A 、 B 為常數，以 x 為自變數之函數 $y = A\cos^2 x + B\sin x\cos x$ ，若 y 的最大值為 9，最小值為 -1 ，則 A 之值為 _____， B 之值為 _____。

B. 有一邊長為 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 。今沿著它的對角線 \overline{AC} 摺起，使平面 ABC 與 ACD 互相垂直，則直線 AB 與直線 CD 間的公垂線段長(意即此兩直線間的距離)為 _____。

第貳部分：非選擇題（占 30 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚予以零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標準於題末。

一、有一遊戲是將盒中放入 2 個白色球、以及紅、藍、綠色球各一個，每次從中任取一球，取後不放回，直到紅、藍、綠 3 個色球全部取出為止。令隨機變數 X 表示此遊戲所取球的次數。試求：

(1) X 的期望值。(7 分)

(2) X 的標準差。(計算到小數點後第三位，第四位四捨五入)(8 分)

(參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\sqrt{7} \approx 2.646$)

二、坐標平面上， O 為原點，若直線 $L: x + y = k$ 與 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + k = 0$ 交於相異的兩個點 A, B ，求：

(1) 實數 k 的範圍。(7 分)

(2) $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ 的範圍。(8 分)